۳) تابع دو ضابطه‌ای: ضابطه‌ها با تغییر اعدادی که x به آن میل می‌کند عوض شوند:

مثال: حاصل حدهای زیر را بدست آورید؟

1) $f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 3x + 2 & x \geq \boxed{2} \ \text{بزرگتر} \\ -3x^3 + 4x - 1 & x < \boxed{2} \ \text{کوچکتر} \end{cases}$

$\lim_{x \to \boxed{2}} f(x) = ?$

چون برابرند لذا باید حد چپ و حد راست محاسبه شود

"ضابطه‌ای که عددش بزرگتر است"

حد راست: $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} (5x^2 - 3x + 2) = 5(2)^2 \overbrace{-3(2)}^{6} + 2 = \overbrace{5 \times 4}^{20} - 6 + 2 = \underbrace{20 - 6} - 2 = 14 - 2 = \boxed{12}$

بزرگتر

$2 \times 2 = 4$

حد چپ: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} (-3x^3 + 4x - 1) = -3(2)^3 + \overbrace{4(2)}^{8} - 1 = \overbrace{-3(8)}^{-24} + 8 - 1 = \underbrace{-24 + 8} - 1 = -16 - 1 = \boxed{-17}$

"کوچکتر"

$2 \times 2 \times 2 = 8$

"حد ندارد چون مقدار حد چپ با مقدار حد راست برابر نیست"

2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x} & x < -3 \ \text{"کوچکتر"} \\ \dfrac{2x^3 - 4x}{-5x^2 + 3x - 1} & x > -3 \ \text{"بزرگتر"} \end{cases}$

$\lim_{x \to -3} f(x) = ?$

چون برابر نیستند < حد چپ؟ حد راست؟

حد راست: $\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3} \dfrac{2x^3 - 4x}{-5x^2 + 3x - 1} = \dfrac{2(-3)^3 - 4(-3)}{-5(-3)^2 + 3(-3) - 1} = \dfrac{\overbrace{2(-27)}^{-54} \overbrace{-4(-3)}^{+12}}{\underbrace{-5(9)}_{-45} + \underbrace{3(-3)}_{-9} - 1}$

بزرگتر

$(-3)(-3)(-3) = -27$

$(-3)(-3) = 9$

$= \dfrac{-54 + 12}{-45 - 9 - 1} = \dfrac{-42}{-55} = \boxed{\dfrac{42}{55}}$

حدچپ: $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{\underbrace{(-3)^2}_{9} - \underbrace{3(-3)}_{9}} = \sqrt{9+9} = \boxed{\sqrt{18}}$

"کوچکتر"

$(-3)(-3)=9$

"حدنداریم"

$3)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^3 + x^2}{-2x+1} & x > -2 \\ \sqrt{2x^2 - 3x + 2} & x \leq -2 \end{cases}$

"بزرگتر"

"کوچکتر"

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = ?$

چون بازه‌ها را داریم: حدچپ؟ حدراست؟

حدراست: $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-2x^3 + x^2}{-2x+1} = \dfrac{-2(-2)^3 + (-2)^2}{\underbrace{-2(-2)}_{4} + 1} = \dfrac{-2(-8)+4}{4+1} = \dfrac{16+4}{5}$

"بزرگتر"

$(-2)(-2)(-2) = -8$

$(-2)(-2) = 4$

$= \dfrac{20}{5} = \boxed{4}$

حدچپ: $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \sqrt{2(-2)^2 - 3(-2) + 2} = \sqrt{\underbrace{2(4)}_{8} \underbrace{-3(-2)}_{6} + 2}$

"کوچکتر"

$(-2)(-2) = 4$

$= \sqrt{8+6+2} = \sqrt{16} = \boxed{4}$

"حدداریم"

"حد بینهایت و حد در بینهایت"

"قضیه":

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (\overbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}^{\text{"چندجمله‌ای از درجه n"}}) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

"بینهایت"

بیشترین درجه چندجمله‌ای (یعنی جمله‌ای که بیشترین درجه را دارد با ضریبش)

مثال: حدهای زیر را حل کنید؟

1) $\lim_{x \to +\infty} (2x^2 - 5x - 3) = ?$

بینهایت ← بیشترین درجه چندجمله‌ای $\Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} (2x^2) = 2(+\infty)^2 = 2(+\infty) = \boxed{+\infty}$

"جایگذاری"

$(+\infty)(+\infty) = +\infty$

2) $\lim_{x \to +\infty} (-3x^2 - x^5 - 2x^7 + x^3) = ?$

بینهایت ← بیشترین درجه چندجمله‌ای $\Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} (-2x^7) = -2(+\infty)^7 = -2(+\infty) = \boxed{-\infty}$

3) $\lim_{x \to -\infty} (5 - 5x^6 - 5x^9 - 10x^5) = ?$

"فرد ← ⊖ به توان فرد می‌شود −"

بینهایت ← بیشترین درجه چندجمله‌ای $\Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} (-5x^9) = -5(-\infty)^9 = -5(-\infty) = \boxed{+\infty}$

4) $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x - 10x^4 + 5x^5) = ?$

"فرد ← ⊖ به توان فرد ⊖ می‌شود"

بینهایت ← بیشترین درجه چندجمله‌ای $\Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} (5x^5) = 5(-\infty)^5 = 5(-\infty) = \boxed{-\infty}$

5) $\lim_{x \to -\infty} (3 - x - 10x^2 - 15x^6) = ?$

"زوج ← ⊖ به توان زوج ⊕ می‌شود"

بینهایت ← "بیشترین درجه چندجمله‌ای" $\Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} (-15x^6) = -15(-\infty)^6 = -15(+\infty) = \boxed{-\infty}$

قضیه:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{a_n x^n}{b_m x^m}\right) \xrightarrow{\text{یعنی}} \frac{\text{بیشترین درجه صورت}}{\text{بیشترین درجه مخرج}}$$

مثال: حاصل حدهای زیر را بدست آورید؟

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x-x^5}{7-2x^3} = ?$

بی‌نهایت $\rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\text{بیشترین توان صورت}}{\text{بیشترین توان مخرج}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^5}{-2x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{(-\infty)^2}{2} = \dfrac{+\infty}{2} = \boxed{+\infty}$

تذکر: $\infty = \dfrac{\infty}{\text{عدد}}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-4x^{10}-3}{x^2-x+2x^{10}} = ?$

بی‌نهایت $\rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\text{بیشترین توان صورت}}{\text{'' '' مخرج}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^{10}}{+2x^{10}} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{4}{2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \overset{\text{عدد}}{-2} = \boxed{-2}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-x-x^2+x^3}{2x-3x^2+x^5-2x^7} = ?$

بی‌نهایت $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{بیشترین توان صورت}}{\text{بیشترین توان مخرج}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{+x^3}{-2x^7} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{2x^4} = -\dfrac{1}{2(+\infty)^4}$

$= -\dfrac{1}{2(+\infty)} = -\dfrac{1}{\infty} = 0$

تذکر: $0 = \dfrac{\text{عدد}}{\infty}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x^2-x^3-2}{x^{10}-2x^{20}+3x^{30}} = ?$

بی‌نهایت $\rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\text{بیشترین توان صورت}}{\text{بیشترین توان مخرج}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^3}{3x^{30}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{3x^{27}} = \dfrac{-1}{3(-\infty)^{27}}$

"فرد ← منفی به توان فرد منفی می‌شود"

$= \dfrac{-1}{3(-\infty)} = \dfrac{-1}{-\infty} = \dfrac{1}{\infty} = \dfrac{\text{عدد}}{\infty} = \boxed{0}$

رفع ابهام $\infty - \infty$:

مثال: حدهای زیر را حل کنید؟

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} - x = ?$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$ $\sqrt{\infty} - (+\infty) = \infty - \infty$ مبهم

چند جمله‌ای

جایگذاری

پس از جایگذاری حاصل "∞" می‌شود

$\times \dfrac{\text{مزدوج}}{\text{مزدوج}}$

قرینه

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x}{1} \times \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3} + x}{\sqrt{x^2-2x+3} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2-2x+3} - x)(\sqrt{x^2-2x+3} + x)}{\sqrt{x^2-2x+3} + x}$

اتحاد مزدوج: $(\text{اولی})^2 - (\text{دومی})^2 \stackrel{?}{=} (\sqrt{x^2-2x+3})^2 - x^2$

$\cancel{x^2} - 2x + 3 - \cancel{x^2} = \boxed{-2x+3}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+3}{\sqrt{x^2-2x+3} + x} =$

بی‌نهایت $\Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{بزرگترین درجه صورت}}{\text{بزرگترین درجه مخرج}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{|x| + x}$

"بزرگترین درجه زیر رادیکال را بنویسید"

$|x|$: $\oplus$ $\boxed{x}$, $\ominus$ $-x$

عدد

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-\cancel{2x}}{\cancel{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} -1 = \boxed{-1}$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 5x - 4} + x = ?$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$ $\sqrt{\infty} + (-\infty) = \infty - \infty$

"چون چندجمله‌ای است پس از جایگذاری حاصل ∞ می‌شود"

قرینه

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 5x - 4} + x \times \dfrac{\sqrt{x^2 + 5x - 4} - x}{\sqrt{x^2 + 5x - 4} - x} =$ "ادامه حل بعد"

ص ۵

اتحاد مزدوج: $(\text{اولی})^2 - (\text{دومی})^2 = \left(\sqrt{x^2+5x-4}\right)^2 - (x)^2 = \cancel{x^2} + 5x - 4 \cancel{- x^2} = \boxed{5x-4}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+5x-4}+x\right)\left(\sqrt{x^2+5x-4}-x\right)}{\sqrt{x^2+5x-4}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5x-4}{\sqrt{x^2+5x-4}-x}$$

بینهایت $\longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\text{بیشترین درجه صورت}}{\text{بیشترین درجه مخرج}} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{5x}{\sqrt{x^2}-x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-5x}{|x|-x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-5x}{\underbrace{-x-x}_{-2x}}$

$x \to -\infty$: $|x| = \begin{cases} x & + \\ -x & - \end{cases}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-5\cancel{x}}{-2\cancel{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

۳) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-10x+2} + x = ?$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \sqrt{\infty} + (-\infty) = \infty - \infty$ → $\times \dfrac{\text{مزدوج}}{\text{مزدوج}}$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-10x+2} + x \times \frac{\sqrt{x^2-10x+2} - x}{\sqrt{x^2-10x+2} - x}$$

قرینه

اتحاد مزدوج: $(\text{اولی})^2 - (\text{دومی})^2 = \left(\sqrt{x^2-10x+2}\right)^2 - x^2 = x^2 - 10x + 2 - x^2 = \boxed{-10x+2}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-10x+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-10x+2}-x\right)}{\sqrt{x^2-10x+2}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-10x+2}{\sqrt{x^2-10x+2}-x}$$

بینهایت $\longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\text{بیشترین درجه صورت}}{\text{بیشترین درجه مخرج}} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-10x}{\sqrt{x^2}-x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-10x}{|x|-x}$

$x \to -\infty$: $|x| = \begin{cases} x & + \\ -x & - \end{cases}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-10x}{-x-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-10\cancel{x}}{-2\cancel{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{10}{2} = \lim_{x\to-\infty} 5 = \boxed{5}$$

پیوستگی:

فرض کنید تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ تعریف شده باشد در این صورت گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a^{+}} f(x) = \lim_{x\to a^{-}} f(x) = f(a) \longrightarrow$$ شرط پیوستگی $f(x)$ در نقطه $x=a$

"حفظ کنید"

پیوستگی راست:

فرض کنید تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ تعریف شده باشد در این صورت گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوستگی راست است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a^{+}} f(x) = f(a)$$

پیوستگی چپ:

فرض کنید تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ تعریف شده باشد در این صورت گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوستگی چپ دارد هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a^{-}} f(x) = f(a)$$

مثال: پیوستگی توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید؟

بزرگتر — "مساوی" — کوچکتر

$$1)\quad f(x) = \begin{cases} 3x^2-4x+5 & x \geq 2 \\ 2x^3-7x+10 & x < 2 \end{cases} \qquad , \qquad x = \underset{a}{2}$$

حل:

$$\lim_{x\to 2^{+}} f(x) = \lim_{x\to 2} (3x^2-4x+5) = 3(\underset{4}{2})^2 - \underbrace{4(2)}_{8} + 5 = \underbrace{3(4)}_{12} - 8 + 5 = 12-8+5 = \boxed{9}$$

بزرگتر

$$\lim_{x\to 2^{-}} f(x) = \lim_{x\to 2} (2x^3-7x+10) = 2(\underset{8}{2})^3 - \underbrace{7(2)}_{14} + 10 = \underbrace{2(8)}_{16} - 14 + 10 = 16-14+10 = \boxed{12}$$

کوچکتر

$f(2)$ از ضابطه‌ای که $=$ دارد استفاده کنید $3x^2-4x+5 = 3(\overset{4}{2})^2 - 4(2) + 5 = \overbrace{3(4)}^{12} - 8 + 5 = \boxed{9}$ پیوستگی راست دارد

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-5x^2}{x-4} & x \leq -3 \\ 3x^3-4x+9 & x > -3 \end{cases}$, $x = -3 \to a$

کوچکتر — مساوی — بزرگتر

حل:

شرط پیوستگی f در نقطه $x=-3$: $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^-} f(x) = f(-3)$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3} (3x^3-4x+9) = 3(-3)^3 \underbrace{-4(-3)}_{+12} + 9 = \underbrace{3(-27)}_{-81} + 12 + 9 = -81 + 12 + 9 = \boxed{-60}$

بزرگتر

$(-3)(-3)(-3) = -27$

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3} \left(\dfrac{x^3-5x^2}{x-4}\right) = \dfrac{(-3)^3-5(-3)^2}{-3-4} = \dfrac{-27-5(9)}{-7} = \dfrac{-27-45}{-7} = \dfrac{-72}{-7} = \boxed{\dfrac{72}{7}}$

$(-3)(-3) = +9$

کوچکتر

$(-3)(-3)(-3) = -27$

$(-3)(-3) = +9$

$f(-3) = \dfrac{x^3-5x^2}{x-4} = \dfrac{(-3)^3-5(-3)^2}{-3-4} = \dfrac{-27-5(9)}{-7} = \dfrac{-27-45}{-7} = \dfrac{-72}{-7} = \boxed{\dfrac{72}{7}}$

"پیوستگی چپ دارد"

3) $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & x \geq 3 \\ -2x+10 & x < 3 \end{cases}$, $x = 3 \to a$

"شرط پیوستگی f در نقطه $x=3$": $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} (2x-2) = 2(3)-2 = 6-2 = \boxed{4}$

"بزرگتر"

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} (-2x+10) = \underbrace{-2(3)}_{-6} + 10 = -6+10 = \boxed{4}$

"کوچکتر"

$f(3) = 2x-2 = \underbrace{2(3)}_{6} - 2 = 6-2 = \boxed{4}$

تابع f در نقطه $x=3$ پیوسته است (چون هر سه مقدار با هم برابرند)

"از ضابطه‌ای که (=) دارد استفاده شد"

مشتق:

تعریف اول مشتق:

فرض کنید تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته باشد در این صورت مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ را با نماد $f'(a)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تعریف دوم مشتق:

فرض کنید تابع $f(x)$ تابعی پیوسته باشد در این صورت مشتق تابع $f(x)$ را با نماد $f'(x)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال: مشتق توابع زیر را در نقطه داده شده بیابید؟

۱) $f(x)=x \quad , \quad x=2 \; (a)$ ← «چون نقطه داریم پس از تعریف اول استفاده می‌کنیم»

حل:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}\overbrace{1}^{\text{عدد}}=\boxed{1}$$

۲) $f(x)=x^2 \quad , \quad x=-3 \; (a)$

حل:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(-3)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-(-3)^2}{x-(-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}=\lim_{x\to -3}(x-3)=-3-3=\boxed{-6}$$

اتحاد مزدوج

۳) $f(x)=x^3 \quad , \quad x=-2 \; a$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{x^3-\overbrace{(-2)^3}^{(-2)(-2)(-2)=-8}}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^3-(-8)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+(2)^2-2x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x^2+4-2x)$$

اتحاد چاق و لاغر

$$=(-2)^2+4\overbrace{-2(-2)}^{+4}=4+4+4=\boxed{12}$$

4) $f(x)=x$ "چون نقطه نداریم از تعریف دوم استفاده کنید"

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}1\xrightarrow{\text{عدد}}=\boxed{1}$$

5) $f(x)=x^2$

اتحاد مربع: (اولی)^2 + (دومی)^2 + ۲(اولی)(دومی)

"از h فاکتور بگیرید"

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+h^2+2xh\cancel{-x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(h+2x)=0+2x=\boxed{2x}$$

"جایگذاری کنید یعنی بجای h قرار دهید"

6) $f(x)=x^3$

اتحاد مکعب: (اولی)^3 + (دومی)^3 + ۳(اولی)^2(دومی) + ۳(اولی)(دومی)^2

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+h^3+3x^2h+3xh^2\cancel{-x^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{h^3+3x^2h+3xh^2}^{\text{"از h فاکتور"}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h^2+3x^2+3xh)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(h^2+3x^2+3xh)$$

$$=(0)^2+3x^2+3x(0)=0+3x^2+0=\boxed{3x^2}$$