فصل اول

تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس

Laplace Transform & Laplace Inverse

مقدمه

تبدیل لاپلاس (Laplace Transform) یکی از مهم‌ترین مباحث ریاضی مورد استفاده در کنترل کلاسیک می‌باشد. این مبحث دارای گستردگی و پیچیدگی‌های خاصی می‌باشد که در این فصل فقط به اصول و قضایای کاربردی آن در بحث کنترل اشاره می‌شود. این قضایا و خواص تابع تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس (Laplace Inverse) در حل معادلات دیفرانسیل مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

در این فصل علاوه بر بحث در مورد تبدیل لاپلاس و معکوس آن به معرفی چند تابع خاص نیز پرداخته خواهد شد.

۱-۱- آشنایی با تبدیل لاپلاس (Laplace Transform)

اگر $F(t)$ را تابعی از زمان برای $t > 0$ درنظر بگیریم تابع تبدیل لاپلاس آن طبق تعریف $f(s)$ می‌باشد*:

---

*- در این فصل توابع را در حوزهٔ زمان با حروف بزرگ مثل $F(t)$ و تبدیل لاپلاس آن را با حروف کوچک مثل $f(s)$ نشان می‌دهیم.

$$f(s) = \mathcal{L}\left\{ F(t) \right\} \tag{۱-۱}$$

تابع تبدیل لاپلاس $F(t)$ یعنی $f(s)$ طبق رابطهٔ زیر تعریف می‌گردد:

$$f(s) = \mathcal{L}\left\{ F(t) \right\} = \int_{0}^{\infty} F(t).e^{-st}.dt \tag{۱-۲}$$

حاصل انتگرال فوق فقط تابع s است که بعدها می‌بینم که s می‌تواند یک عدد حقیقی یا مختلط باشد. از آنجائی که انتگرال فوق در محدوده صفر تا بینهایت گرفته می‌شود این امر نشان می‌دهد که لاپلاس یک تابع اطلاعاتی برای $t < 0$ بدست نمی‌دهد. البته این شرط برای مسائل کاربردی ما محدودیتی ایجاد نمی‌کند زیرا معمولاً متغیر t (زمان) برای مقادیر مثبت یعنی $t > 0$ مفهوم می‌یابد.

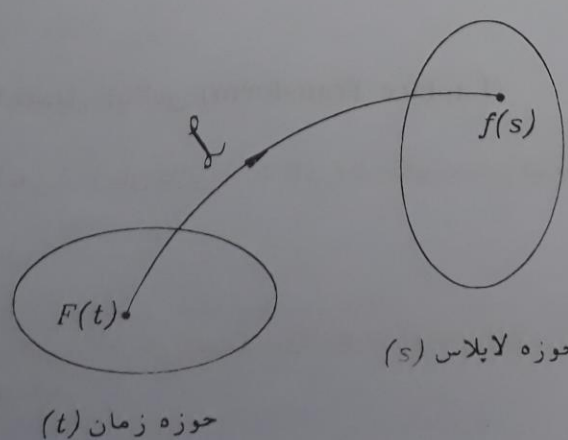
مثال ۱-۱: لاپلاس تابع $F(t) = 1$ را بدست آورید.

حل:

$$\mathcal{L}\left\{ F(t) \right\} = \int_{0}^{\infty} F(t)\,e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0}^{\infty} = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

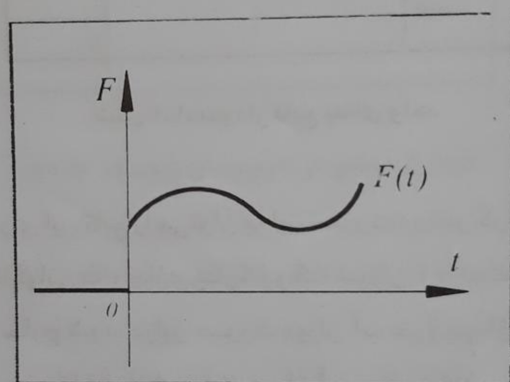
یکی از شرایط لازم برای اینکه لاپلاس یک تابع وجود داشته باشد این است که در معادله (۱-۲) انتگرال برای مقادیر خاصی از s موجود باشد درغیر اینصورت لاپلاس تابع $F(t)$ وجود نخواهد داشت.

باتوجه به مطالب فوق می‌توان گفت که اگر تابع F در حوزهٔ زمان (t) تعریف شده باشد این تابع دارای تابعی متناظر بنام f در حوزهٔ s می‌باشد. یعنی هر تابعی مثل F را در حوزهٔ زمان می‌توان مربوط به یک تابع f در حوزهٔ s دانست که این ارتباط توسط تبدیل لاپلاس (معادله (۱-۲)) ایجاد می‌شود.



باتوجه به تعریف لاپلاس لازم است که مقدار تابع F در $t > \circ$ به صورت F(t) مشخص باشد ولی چون به مقدار تابع در $t < \circ$ نیازی نیست ما مقادیر توابع را در $t < \circ$ برابر صفر درنظر می‌گیریم. یعنی هر تابع F(t) در $t < \circ$ دارای مقدار صفر بوده و در $t > \circ$ مقدار F(t) است، شکل (۱ـ۱).

$$F(t) = \begin{cases} \circ & t < \circ \\ F(t) & t > \circ \end{cases} \quad (۱\text{ـ}۳)$$



شکل ۱ـ۱ـنمودار تابع F(t)

برای اینکه ازنظر ریاضی بتوانیم به مطلب فوق دست بیابیم تابعی جدید تعریف خواهیم کرد.

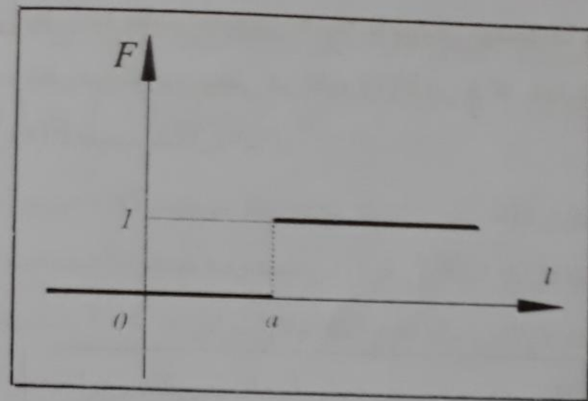
۲ـ۱ـ آشنایی با چند تابع خاص

۱ـ۲ـ۱ـ تابع پله‌ای واحد (Unit Step Function)

این تابع که Heaviside's Unit Function نیز نامیده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(t) = u(t-a) = \begin{cases} \circ & t-a < \circ \\ ۱ & t-a > \circ \end{cases} = \begin{cases} \circ & t<a \\ ۱ & t>a \end{cases} \quad (۱\text{ـ}۴)$$

نمودار این تابع در شکل (۲ـ۱) آورده شده‌است.



شکل ۲-۱-نمودار تابع پله‌ای واحد

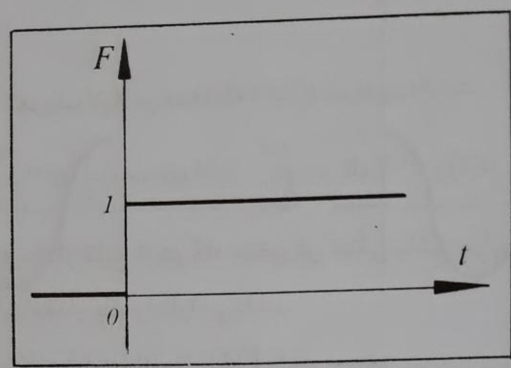
مثال فیزیکی برای این تابع را می‌توان به این صورت درنظر گرفت که در لحظهٔ $t=a$ شیر آب را بطورناگهانی به مقداری بازکنیم که میزان ۱ (واحدآن مهم‌نیست، مثلاً lit/min ۱) از آن خارج شود. دراین صورت میزان آب خروجی از شیر بصورت پله‌ای تغییر کرده است یعنی تا قبل از لحظهٔ a جریان آب صفر بوده و بعد از لحظهٔ a میزان جریان آب lit/min ۱ شده و ادامه دارد. مثال دیگر آن را می‌توان روشن‌کردن چراغ در یک اتاق تاریک درنظر گرفت که تا قبل از روشن‌کردن، شدت نور در اتاق صفر و بعد از آن شدت نور در اتاق مقداری ثابت (مثلاً یک) می‌باشد.

همانگونه که از این مثالها می‌توان متوجه شد در مثالهای معمول فیزیکی چون زمان تغییر از صفر به یک هر چقدر هم کوچک باشد باز زمان کوتاهی است و هیچوقت صفر نمی‌باشد، فرض تابع پله‌ای برای آنها بطور تقریبی صحیح است.

معمولاً زمان اثر تابع پله‌ای واحد را در لحظهٔ صفر درنظر می‌گیریم ($a = ۰$) یعنی لحظهٔ شروع تغییر را لحظهٔ صفر می‌گیریم در این حالت تابع پله‌ای واحد به صورت زیر خواهد شد:

$$F(t) = u(t) = \begin{cases} ۰ & t < ۰ \\ ۱ & t > ۰ \end{cases} \qquad (۱-۵)$$

که نمودار آن مطابق شکل (۱-۳) خواهد شد.



شکل ۳ـ۱ـ نمودار تابع پله‌ای واحد ($a = 0$)

[دقت نمائید که تابع در $t = 0$، که مقدار آن بطور ناگهانی از صفر به یک تغییر می‌کند تعریف نشده‌است.]

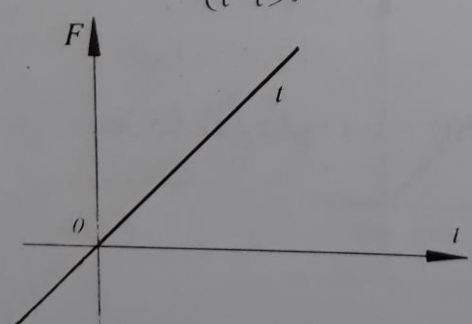
حال با تعریف تابع $u(t)$ و ضرب آن در هر تابع، مقدار آن تابع در $t < 0$ برابر صفر خواهد شد.

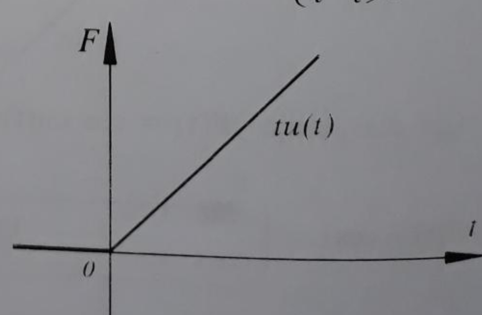
مثال ۲ـ۱: مقدار توابع $F(t) = t$ و $F(t) = tu(t)$ را نوشته و آنها را رسم کنید.

حل:

$$F(t) = t = \begin{cases} t & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$$

$$F(t) = tu(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$$





مثال ۳ـ۱: تابع تبدیل لاپلاس $u(t)$ را بدست آورید.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

حل: باتوجه به تعریف لاپلاس (معادله (۲ـ۱)) خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\left\{ u(t) \right\} = \int_0^\infty u(t) .\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \qquad (۱\text{ـ}۶)$$

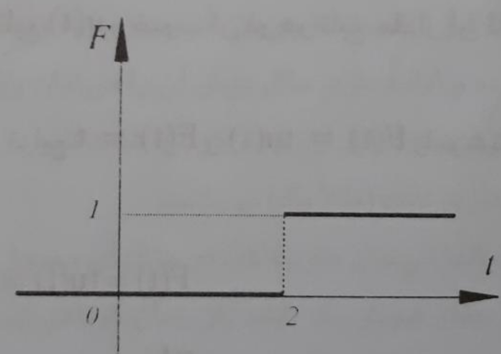
توجه نمائید که مقدار تابع u هرگاه متغیرش منفی باشد برابر صفر بوده و هرگاه متغیرش مثبت باشد مقدار یک را دارا میباشد.

مثال ۴ـ۱: مقدار تابع $F(t) = u(t-2)$ را بنویسید.

حل:

$$F(t) = u(t-2) = \begin{cases} 0 & t-2 < 0 \\ 1 & t-2 > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$

نمودار تابع $u(t-2)$ در شکل زیر رسم شده‌است:

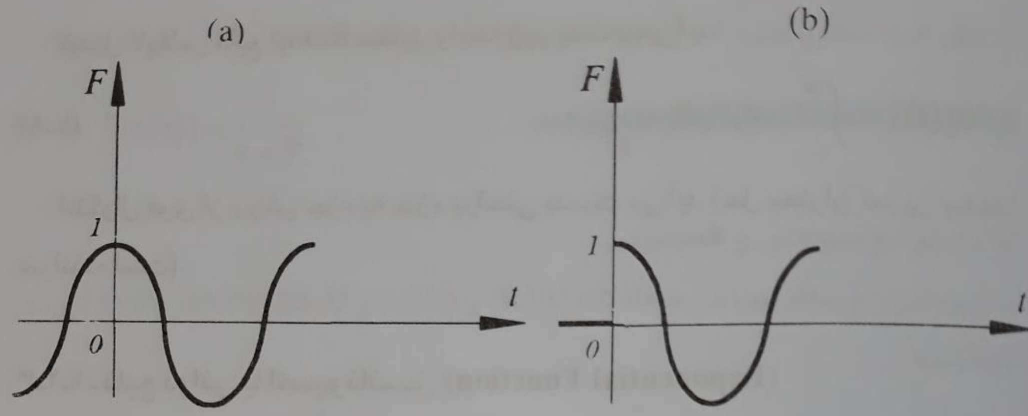


مثال ۵ـ۱: مقدار توابع $F(t) = \cos t$ و $F(t) = \cos t.u(t)$ را نوشته و شکل آنها را رسم کنید.

حل:

$$F(t) = \cos t = \begin{cases} \cos t & t < 0 \\ \cos t & t > 0 \end{cases} \qquad (a)$$

$$F(t) = \cos t.u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \cos t & t > 0 \end{cases} \qquad (b)$$



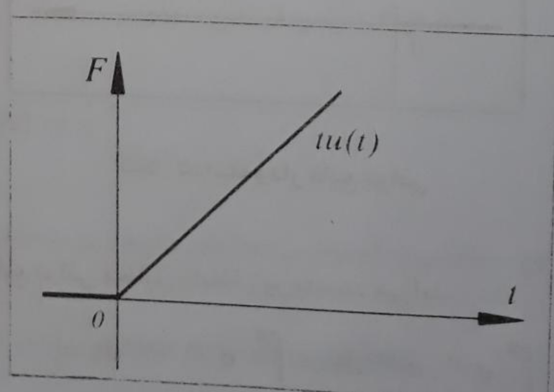
توجه: در این کتاب کلیه توابعی که در نظر می‌گیریم به فرم $F(t)u(t)$ می‌باشد. لذا اگر در جایی $u(t)$ آن نوشته نشود بخاطر سادگی است وگرنه مقدار کلیه توابع در $t<0$ برابر صفر خواهد بود.

۲-۲-۱- تابع **Ramp** یا خطی

این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(t) = tu(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t>0 \end{cases} \tag{۱-۷}$$

که نمودار آن بصورت شکل (۴-۱) می‌باشد.



شکل ۴-۱- نمودار تابع خطی

تبدیل لاپلاس تابع Ramp مطابق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \int_{0}^{\infty} t\ e^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2} \tag{1-8}$$

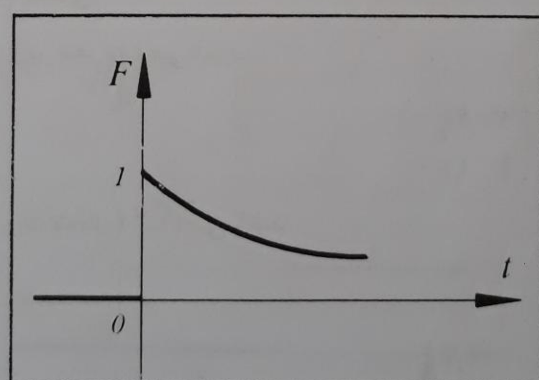
انتگرال فوق از روش جزء به جزء براحتی بدست می‌آید (حل بعنوان تمرین بعهدهٔ خواننده است).

۳-۲-۱- تابع توانی یا اکسپونانسیل (Exponential Function)

این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(t) = e^{-at}u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{-at} & t>0 \end{cases} \qquad (a>0) \tag{1-9}$$

که نمودار آن بصورت شکل (۵-۱) می‌باشد.



شکل ۵-۱- نمودار تابع توانی

تبدیل لاپلاس تابع توانی مطابق رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-at}.e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt =$$

$$\frac{-1}{s+a}\,e^{-(s+a)t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s+a} \tag{1-10}$$

مثال ۶ـ۱: مطلوبست $\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\}$.

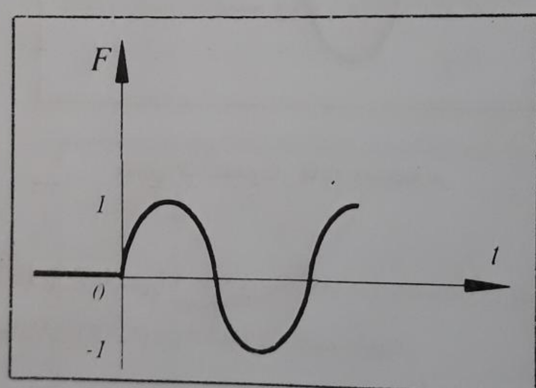
حل: طبق معادلهٔ (۱۰ـ۱) خواهیم‌داشت:

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\} = \frac{1}{s+3}$$

۴ـ۲ـ۱ـ توابع سینوس و کسینوس

این توابع به‌ترتیب در معادلات (۱۱ـ۱) و (۱۲ـ۱) و اشکال (۶ـ۱) و (۷ـ۱) آورده شده‌است:

$$F(t) = \sin at \,.\, u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \sin at & t>0 \end{cases} \tag{۱۱ـ۱}$$



شکل ۶ـ۱ـ نمودار تابع سینوس

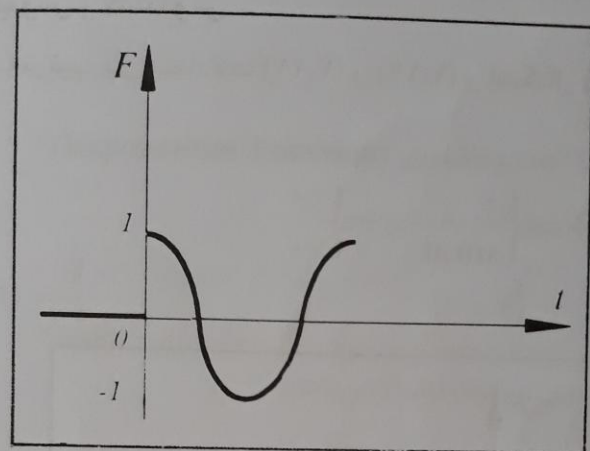
$$F(t) = \cos at \,.\, u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \cos at & t>0 \end{cases} \tag{۱۲ـ۱}$$

تبدیل لاپلاس توابع سینوس و کسینوس مطابق روابط زیر بدست می‌آید:

$$\mathcal{L}\{\sin at \,.\, u(t)\} = \int_0^\infty \sin at \,.\, e^{-st}\, dt = \frac{a}{s^2+a^2} \tag{۱۳ـ۱}$$

$$\mathcal{L}\{\cos at \,.\, u(t)\} = \int_0^\infty \cos at \,.\, e^{-st}\, dt = \frac{s}{s^2+a^2} \tag{۱۴ـ۱}$$

انتگرالهای فوق ازطریق جزء به جزء بدست آمده است. (حل بعنوان تمرین بعهدهٔ خواننده است).



شکل ۷ـ۱ـ نمودار تابع کسینوس

مثال ۷ـ۱: تابع تبدیل لاپلاس $\sin 2t$ و $\cos 3t$ را بدست آورید.

حل: مطابق معادلات (۱۳ـ۱) و (۱۴ـ۱) خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$$

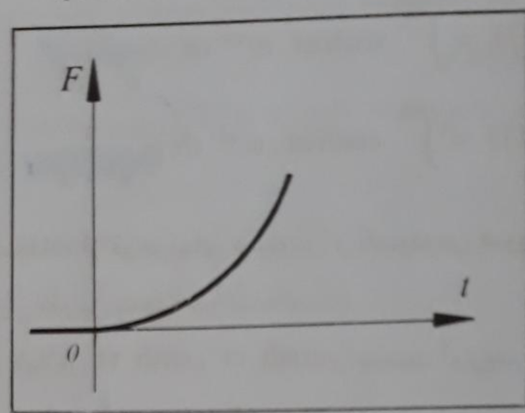
$$\mathcal{L}\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2+9}$$

۵ـ۲ـ۱ـ توابع سینوس هیپربولیک و کسینوس هیپربولیک

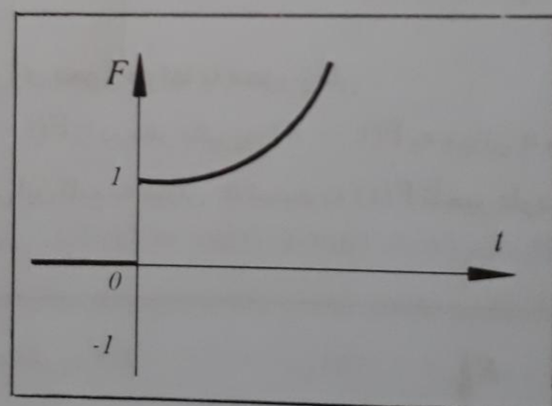
این توابع بهترتیب در معادلات (۱۵ـ۱) و (۱۶ـ۱) و اشکال (۸ـ۱) و (۹ـ۱) اورده شدهاست:

$$F(t) = \sinh at \, . \, u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sinh at & t > 0 \end{cases} \qquad (1\text{-}15)$$

$$F(t) = \cosh at \,.\, u(t) = \begin{cases} \cdot & t < \cdot \\ \cosh at & t > \cdot \end{cases} \qquad (۱\text{-}۱۶)$$



شکل ۸ـ۱ـ نمودار تابع سینوس هیپربولیک



شکل ۹ـ۱ـ نمودار تابع کسینوس هیپربولیک

یادآوری: $\sinh x$ و $\cosh x$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sinh x = \frac{۱}{۲}(e^{x} - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{۱}{۲}(e^{x} + e^{-x})$$

تبدیل لاپلاس sinh at و cosh at مطابق روابط زیر بدست می‌آید:

$$\mathscr{L}\{\sinh at \cdot u(t)\} = \int_0^\infty \sinh at \cdot e^{-st}\, dt = \frac{a}{s^2 - a^2} \qquad (1\text{-}17)$$

$$\mathscr{L}\{\cosh at \cdot u(t)\} = \int_0^\infty \cosh at \cdot e^{-st}\, dt = \frac{s}{s^2 - a^2} \qquad (1\text{-}18)$$

انتگرالهای فوق با استفاده از فرمولهای سینوس و کسینوس هیپربولیک براحتی بدست می‌آید. (حل بعنوان تمرین بعهدهٔ خواننده است).

مثال ۸ـ۱: تابع تبدیل لاپلاس sinh ۲t و cosh ۳t را بدست آورید.

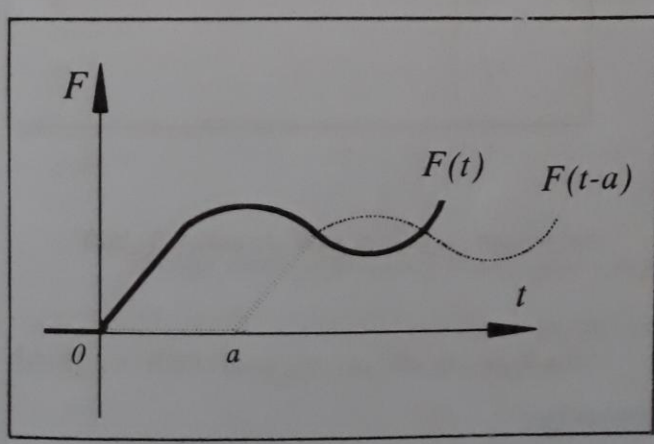
حل: مطابق معادلات (۱۵ـ۱) و (۱۶ـ۱) خواهیم داشت:

$$\mathscr{L}\{\sinh 2t\} = \frac{2}{s^2 - 4}$$

$$\mathscr{L}\{\cosh 3t\} = \frac{s}{s^2 - 9}$$

۶ـ۲ـ۱ـ انتقال توابع روی محور طولها یا محور زمان

تابع $F(t)$ و $F(t-a)$ را درنظر بگیرید. $F(t-a)$ به میزان a روی محور زمان انتقال یافته است. یعنی این تابع به میزان a نسبت به $F(t)$ تأخیر دارد، شکل (۱۰ـ۱).

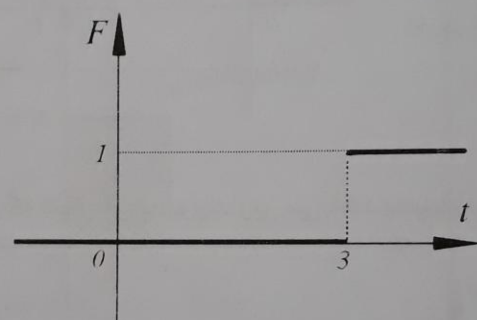


مفهوم فوق این است که شروع تغییرات $F(t)$ از لحظه صفر می‌باشد. ولی اگر بعد از گذشت زمان a، تابع F تغییرات خود را آغاز نماید درآنصورت این تغییرات بصورت $F(t-a)$ بیان می‌شود.

مثال ۹-۱: نمودار تابع $F(t) = u(t-۳)$ را رسم نمائید.

حل:

$$F(t) = u(t-۳) = \begin{cases} ۰ & t-۳<۰ \\ ۱ & t-۳>۰ \end{cases} = \begin{cases} ۰ & t<۳ \\ ۱ & t>۳ \end{cases}$$



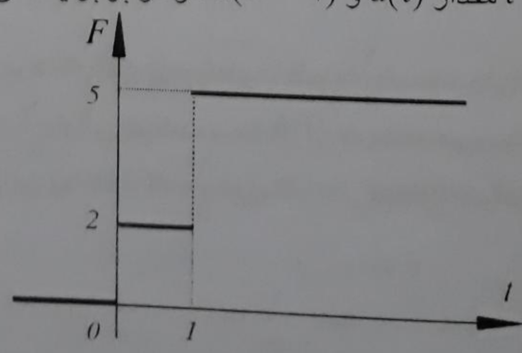
مثال ۱۰-۱: شکل تابع $F(t) = ۲u(t) + ۳u(t-۱)$ را رسم نمائید.

حل: در $t < ۰$ مقادیر $u(t)$ و $u(t-۱)$ هر دو برابر صفر می‌باشند.

در $۰ < t < ۱$ مقدار $u(t) = ۱$ و $u(t-۱) = ۰$ می‌باشد.

در $t > ۱$ مقدار $u(t)$ و $u(t-۱)$ هر دو برابر یک می‌باشند. پس:

$$F(t) = \begin{cases} ۰ & t<۰ \\ ۲ & ۰<t<۱ \\ ۵ & t>۱ \end{cases}$$



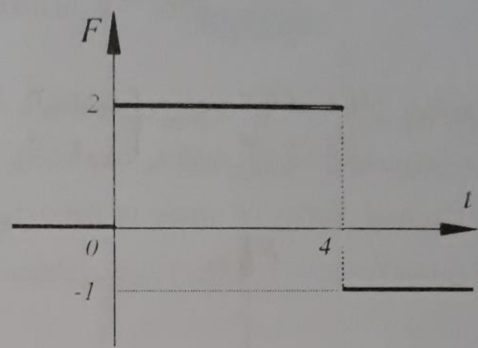
مثال فیزیکی تابع فوق یعنی $F(t)$ را به اینصورت فرض نمائید که در لحظه صفر

ابتدا شیر آب را دو دور سریع باز نمائیم و بعد از یک دقیقه سریعاً سه دور دیگر آن را باز نمائیم و به همان حال آن را رها سازیم.

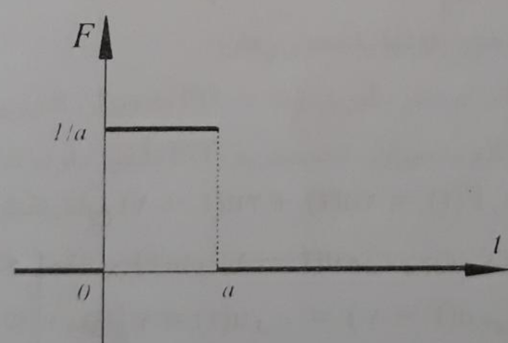
مثال ۱۱-۱: شکل تابع $F(t) = ۲u(t) - ۳u(t - ۴)$ را رسم نمائید.

حل:

$$F(t) = \begin{cases} ۰ & t < ۰ \\ ۲ & ۰ < t < ۴ \\ -۱ & t > ۴ \end{cases}$$



مثال ۱۲-۱: تابعی که شکل آن بصورت زیر می‌باشد بدست آورید.



حل: قسمت اوّل این شکل در $t < a$ یک تابع پله‌ای با دامنه $\frac{۱}{a}$ است. یعنی: $\frac{۱}{a}u(t)$. در $t = a$ یک تابع پله‌ای با دامنه $\frac{۱}{a}$ از آن کم شده و مقدار آن به صفر می‌رسد این پله چون در $t = a$ اثر کرده پس تابع آن $\frac{۱}{a}u(t - a)$ می‌باشد. در مجموع خواهیم داشت:

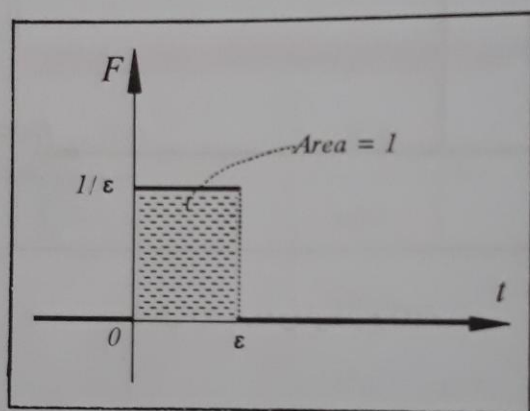
$$F(t) = \begin{cases} ۰ & t < ۰ \\ \frac{۱}{a} & ۰ < t < a \\ ۰ & t > a \end{cases} = \frac{۱}{a}u(t) - \frac{۱}{a}u(t - a) = \frac{۱}{a}[u(t) - u(t-a)]$$

۱-۲-۷- تابع ضربان ایده‌آل واحد (Unit Impulse Function)

تابع زیر را درنظر بگیرید:

$$F(t) = F_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases} \qquad (1\text{-}19)$$

اگر $0 < \varepsilon$ باشد نمودار تابع فوق به صورت شکل (۱-۱۱) درخواهد آمد.



شکل ۱-۱۱- نمودار تابع $F_\varepsilon(t)$

باتوجه به شکل (۱-۱۱) مساحت این تابع همیشه به‌ازای جمیع مقادیر ε مقدار یک می‌باشد.

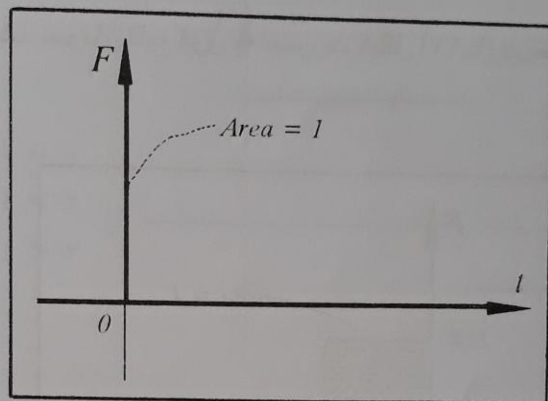
$$\int_0^\infty F_\varepsilon(t)\,dt = 1$$

اگر مقدار ε بسیار کوچک شود، یعنی وقتی ε به سمت صفر میل کند $(\varepsilon \to 0)$ تابع $F_\varepsilon(t)$ را بصورت $\delta(t)$ نمایش داده و آن را تابع ضربان واحد (Unit Impulse Function) یا تابع دلتا یا دلتای دیراک (Dirac Delta Function) می‌نامند.

$$F_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \delta(t) \qquad (1\text{-}20)$$

شکل (۱۲-۱) نمودار تابع $\delta(t)$ را [با کوچک‌نمودن ε در شکل (۱۱-۱)] $(\varepsilon \to \circ)$ نشان می‌دهد.

$$\varepsilon \to \circ \qquad , \qquad \frac{۱}{\varepsilon} \to \infty$$



شکل ۱۲-۱- نمودار تابع $\delta(t)$

(تبدیل لاپلاس $\delta(t)$ در مثال (۲۰-۱) اثبات خواهد شد.)
برخی از خواص تابع $\delta(t)$ بصورت زیر است:

$$\int_{\circ}^{\infty} \delta(t)\, dt = ۱ \tag{۱-۲۱}$$

$$\int_{\circ}^{\infty} \delta(t)\ G(t)\, dt = G(\circ) \qquad \text{(۱-۲۲) [برای هر تابع پیوسته } G(t)\text{]}$$

همانگونه که دیده می‌شود تابع $\delta(t)$ در لحظه صفر دارای مقدار بسیار بزرگی بوده ولی در لحظات دیگر مقدار آن صفر می‌باشد.

چون تابع $\delta(t)$ از $\underset{\varepsilon \to \circ}{F_{\varepsilon}(t)}$ نتیجه شده بود درعمل هرچه ε کوچکتر باشد تابع حاصله به $\delta(t)$ ایده‌آل نزدیک‌تر می‌باشد. مثال فیزیکی $\delta(t)$ را می‌توان بدینصورت تصور نمود که در یک اتاق تاریک برای لحظه‌ای بسیار کوچک چراغ را روشن کرده و دوباره خاموش نمائیم. ازنظر روشنایی، شدت نور در یک لحظه به مقدار زیاد (لحظه صفر) در اتاق وجود داشته و قبل و بعد از آن وجود ندارد (اتاق تاریک است).

بعنوان مثال دیگر می‌توان مخزنی را درنظر گرفت که هیچگونه سیالی بدان وارد نمی‌شود بطور ناگهانی در یک لحظه یک لیتر آب بداخل آن تخلیه نمائیم. ازنظر میزان سیال فقط در یک لحظه به داخل این مخزن ورودی داشته‌ایم و در قبل و بعد از آن لحظه میزان آب ورودی به آن صفر است. (البته هرچه طول زمان این تخلیه کوتاه‌تر باشد فرض تابع $\delta(t)$ برای این تغییر صحیح‌تر است). در جدول (۱-۱) تبدیل لاپلاس برخی از توابع متداول آورده شده‌است. جدول کاملتر برای توابع پیچیده‌تر در ضمیمهٔ الف ارائه شده‌است.

جدول ۱-۱-توابع تبدیل لاپلاس برای چند تابع

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$	$F(t)$
$\frac{۱}{s}$	$u(t)$
$\frac{۱}{s^{۲}}$	$tu(t)$
$\frac{n!}{s^{n+۱}}$	$t^{n}u(t)$, n = ۰ و ۱، ۲، ...
$\frac{۱}{s+a}$	$e^{-at}u(t)$
$\frac{a}{s^{۲}+a^{۲}}$	$\sin at.u(t)$
$\frac{s}{s^{۲}+a^{۲}}$	$\cos at.u(t)$
$\frac{a}{s^{۲}-a^{۲}}$	$\sinh at.u(t)$
$\frac{s}{s^{۲}-a^{۲}}$	$\cosh at.u(t)$

۳-۱- قضایا و خواص تبدیل لاپلاس

در اینجا فقط قضایا و خواصی از تبدیل لاپلاس مورد بحث قرار می‌گیرد که در مباحث کنترل و فصل‌های بعدی موردنیاز می‌باشد.

- اگر $f(s)$ تبدیل لاپلاس $F(t)$ باشد در اینصورت برای هر ثابت اختیاری C داریم:

$$\mathcal{L}\left\{CF(t)\right\} = Cf(s) \qquad (1\text{-}23)$$

(اثبات رابطهٔ فوق با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس بعنوان تمرین بعهده خواننده است.)

مثال ۱۳-۱: مطلوبست $\mathcal{L}\left\{3\,tu(t)\right\}$.

حل: با استفاده از جدول (۱-۱) داریم $\mathcal{L}\{t\,u(t)\} = \frac{1}{s^2}$ ، پس طبق معادله (۱-۲۳) خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\{3\,tu(t)\} = 3\mathcal{L}\,\{tu(t)\} = \frac{3}{s^2}$$

۱-۳-۱- خاصیت خطی (Linearity Property)

اگر $f_1(s)$ و $f_2(s)$ به‌ترتیب تبدیل لاپلاس توابع $F_1(t)$ و $F_2(t)$ باشد درآنصورت برای ثوابت اختیاری C_1 و C_2 داریم:

$$\mathcal{L}\left\{C_1F_1(t) + C_2F_2(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{C_1F_1(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{C_2F_2(t)\right\}$$

$$= C_1f_1(s) + C_2f_2(s) \qquad (1\text{-}24)$$

(اثبات بعنوان تمرین بعهده خواننده است).

مثال ۱۴-۱: مطلوبست $\mathcal{L}\{1 + 3t\}$.

حل: طبق خاصیت خطی داریم:

$$\mathcal{L}\{1 + 3t\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{3t\} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

مثال ۱۵-۱: مطلوبست $\mathcal{L}\{\,2\cos 3t + 4\,e^{-5t}\}$.

حل: طبق خاصیت خطی معادله (۱-۲۴) داریم:

$$\mathcal{L}\left\{2\cos 3t + 4\,e^{-5t}\right\} = 2\,\mathcal{L}\,\{\cos 3t\} + 4\mathcal{L}\,\{e^{-5t}) = \frac{2s}{s^2+9} + \frac{4}{s+5}$$

۲-۳-۱- خاصیت انتقال اول (First Translation or Shifting Property)

در صورتیکه $f(s)$ لاپلاس $F(t)$ باشد، درآنصورت خواهیم داشت:

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}F(t)\right\} = f(s-a) \qquad (1\text{-}25)$$

اثبات: از تعریف تبدیل لاپلاس استفاده می‌نمائیم:

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}F(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{at}F(t).e^{-st}dt = \int_0^{\infty} F(t)\ \ e^{-(s-a)t}dt$$

با فرض $s - a = S$ خواهیم داشت:

$$\int_0^{\infty} F(t)\ \ e^{-(s-a)t}dt = \int_0^{\infty} F(t)\ \ e^{-St}\,dt = f(S)$$

که با قرار دادن $s - a$ بجای S معادله (۱_۲۵) حاصل می‌شود.

مثال ۱۶_۱: مطلوبست $\mathscr{L}\left\{e^{-2t}\cos 3t\right\}$.

حل: از جدول(۱_۱) داریم $\mathscr{L}\{\cos 3t\} = \dfrac{s}{s^2+9}$. پس با استفاده از معادلهٔ (۱_۲۵) می‌نویسیم:

$$\mathscr{L}\left\{e^{-2t}\cos 3t\right\} = \frac{(s+2)}{(s+2)^2+9} = \frac{s+2}{s^2+4s+13}$$

صفحه 43 مثال ۴ مثال ۹ (H.W)

۳_۳_۱_خاصیت انتقال دوم (Second Translation or Shifting Property)

اگر $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$ باشد در آنصورت $\mathscr{L}\{F(t-a)\}$ خواهد بود:

$$\mathscr{L}\{F(t-a)\} = e^{-as}f(s) \qquad (1\text{-}26)$$

اثبات:

$$\mathscr{L}\{F(t-a)\} = \int_0^{\infty} F(t-a)\,e^{-st}\,dt$$

فرض می‌کنیم که $t - a = \tau$ باشد.

$$t - a = \tau \Rightarrow t = \tau + a \Rightarrow dt = d\tau$$

$$\mathscr{L}\{F(t-a)\} = \int_{-a}^{\infty} F(\tau)\,e^{-s(\tau+a)}\,d\tau = e^{-as}\int_{-a}^{\infty} F(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau$$

دقت نمائید چون متغیر داخل انتگرال تغییر کرده حدود انتگرال نیز تغییر یافته است.
انتگرال فوق را اگر به دو محدود تقسیم نمائیم:

$$e^{-as}\int_{-a}^{\infty} F(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = e^{-as}\left[\int_{-a}^{\circ} F(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau + \int_{\circ}^{\infty} F(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau\right]$$

انتگرال اول داخل کروشه صفر می‌باشد (چرا؟) و انتگرال دوم نیز تعریف تبدیل لاپلاس تابع $F(t)$ است. به این ترتیب معادله (۲۶ـ۱) اثبات می‌گردد:

$$\mathcal{L}\{F(t-a)\} = e^{-as}\int_{\circ}^{\infty} F(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = e^{-as} f(s)$$

مثال ۱۷ـ۱: مطلوبست $\mathcal{L}\{u(t-۲)\}$.

حل: طبق معادلهٔ (۲۶ـ۱):

$$\mathcal{L}\{u(t-۲)\} = \frac{e^{-۲s}}{s}$$

مثال ۱۸ـ۱: مطلوبست $\mathcal{L}\{۲\cos(۳t-۵)\}$.

حل: تابع اصلی $\cos ۳t$ بوده است که به میزان $\frac{۵}{۳}$ انتقال یافته و $\cos ۳(t-\frac{۵}{۳})$ حاصل شده‌است. با استفاده از جدول (۱ـ۱) می‌دانیم $\mathcal{L}\{\cos ۳t\} = \frac{s}{s^۲+۹}$. پس:

$$\mathcal{L}\left\{۲\cos ۳(t-\frac{۵}{۳})\right\} = \frac{۲\, s\, e^{-\frac{۵}{۳}s}}{s^۲+۹}$$

مثال ۱۹ـ۱: مطلوبست تبدیل لاپلاس تابع $F_\varepsilon(t) = \frac{۱}{\varepsilon}[u(t) - u(t-\varepsilon)]$

حل:

$$\mathcal{L}\{F_\varepsilon(t)\} = \frac{۱}{\varepsilon}\left[\frac{۱}{s} - \frac{e^{-\varepsilon s}}{s}\right] = \frac{۱-e^{\varepsilon s}}{\varepsilon s} \qquad (۱\text{ـ}۲۷)$$

مثال ۲۰ـ۱: با توجه به نتیجهٔ مثال (۱۹ـ۱) تبدیل لاپلاس $F(t) = \delta(t)$ را

بدست آورید.

حل: در تعریف تابع $\delta(t)$ از معادلهٔ (۲۰ـ۱) دیدیم که:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(t)$$

اگر از طرفین رابطه فوق تبدیل لاپلاس بگیریم:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}\{F_\varepsilon(t)\}$$

باتوجه به نتیجه مثال (۱۹ـ۱) در معادلهٔ فوق جایگزین می‌کنیم:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} = \frac{0}{0}$$

همانگونه که دیده می‌شود کسر فوق به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآمده‌است. برای رفع ابهام از قاعده هوپیتال استفاده می‌نمائیم:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{s\, e^{-\varepsilon s}}{s} = 1 \qquad (۱ـ۲۸)$$

۴ـ۳ـ۱ـ خاصیت تغییر مقیاس (Change of Scale Property)

اگر $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ باشد در آنصورت داریم:

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (۱ـ۲۹)$$

اثبات: از تعریف تبدیل لاپلاس برای تابع $F(at)$ استفاده می‌کنیم:

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \int_0^\infty F(at)\, e^{-st} dt$$

مقدار at را تغییر متغیر می‌دهیم:

$$at = \tau \Rightarrow t = \frac{\tau}{a} \Rightarrow dt = \frac{1}{a} d\tau$$

با تغییر متغیر $S = \frac{s}{a}$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^\infty F(\tau)\, e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} \int_0^\infty F(\tau)\, e^{-S\tau} d\tau$$

انتگرال فوق طبق تعریف تبدیل لاپلاس برابر $f(S)$ می‌باشد که بعداز جایگزینی $S = \frac{s}{a}$

خواهیم داشت:

$$\mathscr{L}\{ F(at) \} = \frac{1}{a} f(S) = \frac{1}{a} f(\frac{s}{a})$$

مثال ۲۱ـ۱: مطلوبست $\mathscr{L}\{ \cos ۳t\}$.

حل: از جدول (۱ـ۱) داریم $\mathscr{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^۲ + ۱}$. حال بااستفاده از معادلهٔ (۱ـ۲۹) می‌نویسیم:

$$\mathscr{L}\{ \cos ۳t\} = \frac{۱}{۳} \frac{(\frac{s}{۳})}{(\frac{s}{۳})^۲ + ۱} = \frac{s}{s^۲ + ۹}$$

۵ـ۳ـ۱ـ تابع تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع

اگر $\mathscr{L}\{ F(t)\} = f(s)$ باشد تبدیل لاپلاس مشتق $F(t)$ برابر است با:

$$\mathscr{L}\{ F'(t)\} = s f(s) - F(۰) \qquad (۱ـ۳۰)$$

که در رابطه فوق $F(۰)$ مقدار تابع در $t = ۰$ می‌باشد.

اثبات: از تعریف تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم:

$$\mathscr{L}\{ F'(t)\} = \mathscr{L}\left\{\frac{dF}{dt}\right\} = \int_۰^\infty \frac{dF}{dt} e^{-st} dt$$

انتگرال فوق را از روش جزء به جزء بدست می‌آوریم:

$$e^{-st} = u \Rightarrow du = -s\ e^{-st}\ dt$$

$$\frac{dF}{dt} dt = dF = dV \Rightarrow V = F(t)$$

$$\int_۰^\infty \frac{dF}{dt} e^{-st} dt = e^{-st} F(t) \Big|_۰^\infty + s \int_۰^\infty F(t) e^{-st} dt$$

جملهٔ اول عبارت سمت راست تساوی فوق عبارتست از:

$$e^{-st} F(t) \Big|_۰^\infty = ۰ - F(۰)$$

و جملهٔ انتگرال عبارت سمت راست طبق تعریف تبدیل لاپلاس برابر است با:

$$s\int_{\circ}^{\infty} F(t)\,e^{-st}\,dt = s\,f(s)$$

و به این‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,f(s) - F(\circ)$$

مثال ۲۲ـ۱: $\mathcal{L}\{F''(t)\}$ را بدست آورید.

حل: ابتدا $F''(t)$ را به صورت $(F'(t))'$ درنظر گرفته، و طبق معادله (۳۰ـ۱) خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = \mathcal{L}\{(F'(t))'\} = s\,\mathcal{L}\{F'(t)\} - F'(\circ)$$

حال مقدار $\mathcal{L}\{F'(t)\}$ را از معادلهٔ (۳۰ـ۱) قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s\{s\,f(s) - F(\circ)\} - F'(\circ) = s^{۲} f(s) - s\,F(\circ) - F'(\circ) \qquad (۱\text{ـ}۳۱)$$

تمرین: با روشی مشابه مثال (۲۲ـ۱) تبدیل لاپلاس مشتقات سوم و چهارم را بدست آورید.

با روش تمرین فوق فرمول تبدیل لاپلاس مشتق n ام بصورت زیر درمی‌آید:

$$\mathcal{L}\left\{F^{(n)}(t)\right\} = s^{n} f(s) - s^{n-۱}\,F(\circ) - s^{n-۲}\,F^{(۱)}(\circ) - s^{n-۳}\,F^{(۲)}(\circ) - \ldots\ldots - F^{(n-۱)}(\circ) \qquad (۱\text{ـ}۳۲)$$

توان‌های داخل پرانتز مرتبهٔ مشتق را نشان می‌دهد.

در این رابطه اگر بجای n برابر یک یا دو یا سه یا... قرار دهیم به ترتیب تبدیل لاپلاس مشتقات اول و دوم و سوم و... بدست می‌آید.

مثال ۲۳ـ۱: با استفاده از معادلهٔ (۳۲ـ۱) تابع تبدیل لاپلاس مشتق پنجم یک تابع را بنویسید.

حل: $\mathcal{L}\left\{F^{(۵)}(t)\right\} = s^{۵} f(s) - s^{۴} F(\circ) - s^{۳} F'(\circ) - s^{۲} F''(\circ) - s\,F'''(\circ) - F''''(\circ)$

روابط تبدیل لاپلاس مشتقات توابع در بسیاری موارد ما را قادر می‌سازد تا بدون استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس و بدون انتگرال‌گیری، تبدیل لاپلاس توابع را بدست آوریم.

مثال ۲۴-۱: اگر $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ باشد، $\mathcal{L}\{\sin at\}$ را بدست‌آورید.

حل:

$$F(t) = \cos at\ ,\ F'(t) = -a \sin at\ ,\ F(0) = \cos 0 = 1$$

با استفاده از معادلهٔ (۳۰-۱):

$$\mathcal{L}\{(\cos at)'\} =$$

$$\mathcal{L}\{-a\sin at\} = s\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) - 1 = \frac{s^2}{s^2+a^2} - 1 = \frac{-a^2}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{-a \sin at\} = \frac{-a^2}{s^2+a^2} \Rightarrow \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

مثال ۲۵-۱: $\mathcal{L}\{e^{at}\}$ را بدست آورید (لاپلاس‌گیری بدون استفاده از انتگرال):

حل:

$$F(t) = e^{at} \Rightarrow F'(t) = a\ e^{at}\ ,\ F(0) = e^{0} = 1$$

اگر مقادیر فوق را در معادلهٔ (۳۰-۱) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\{a\ e^{at}\} = s\mathcal{L}\{e^{at}\} - 1$$

$$a\mathcal{L}\{e^{at}\} = s\mathcal{L}\{e^{at}\} - 1 \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

۶-۳-۱- تبدیل لاپلاس انتگرال یک تابع

اگر $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ باشد در آن‌صورت داریم:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(t)\,dt\right\} = \frac{f(s)}{s} \tag{۱-۳۳}$$

اثبات: $G(t)$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$G(t) = \int_0^t F(t)\,dt$$

$$G'(t) = F(t) \quad , G(\circ) = \int_{\circ}^{\circ} F(t)\, dt = \circ$$

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{G(t)\} - G(\circ)$$

در رابطهٔ فوق به‌جای $G'(t)$ و $G(t)$ مقادیرشان را جایگزین می‌نمائیم:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = s\,\mathcal{L}\left\{\int_{\circ}^{t} F(t)\, dt\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_{\circ}^{t} F(t)\, dt\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

مثال ۲۶-۱: در صورتیکه داشته‌باشیم $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}\frac{1}{s}$. تابع تبدیل لاپلاس $\int_{\circ}^{t}\frac{\sin t}{t}\, dt$ را بدست آورید.

حل: با استفاده از معادلهٔ (۳۳-۱) خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{\circ}^{t}\frac{\sin t}{t}\, dt\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

۷-۳-۱- تابع تبدیل لاپلاس حاصلضرب توابع در t^n

اگر $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ باشد در آن‌صورت خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\left\{t^n F(t)\right\} = (-1)^n f^{(n)}(s) \qquad (۱-۳۴)$$

که $f^{(n)}(s)$ مشتق n ام $f(s)$ نسبت به s می‌باشد.

مثال ۲۷-۱: در صورتیکه بدانیم $\mathcal{L}\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3}$ می‌باشد $\mathcal{L}\{t\,e^{3t}\}$ و $\mathcal{L}\left\{t^2\, e^{3t}\right\}$ را بدست آورید:

حل: با استفاده از معادلهٔ (۳۴-۱):

$$\{t\,e^{3t}\} = (-1)\, f'(s) = -\left(\frac{1}{s-3}\right)' = \frac{1}{(s-3)^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{t^{2}e^{3t}\right\}=(-1)^{2}f''(s)=\left(\frac{1}{s-3}\right)''=\frac{2}{(s-3)^{3}}$$

مثال ۱ـ۲۸: $\mathscr{L}\{t\sin at\}$ را بدست آورید.

حل: از جدول (۱ـ۱) داریم $\mathscr{L}\{\sin at\}=\frac{a}{s^{2}+a^{2}}$. پس‌از معادلهٔ (۱ـ۳۴) می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathscr{L}\{t\sin at\}=(-1)^{1}\left(\frac{a}{s^{2}+a^{2}}\right)'=\frac{2as}{(s^{2}+a^{2})^{2}}$$

تمرین: $\mathscr{L}\{t^{2}\cos at\}$ را بدست آورید.

۱ـ۳ـ۸ـ تابع تبدیل لاپلاس حاصل تقسیم یک تابع بر t

اگر $\mathscr{L}\{F(t)\}=f(s)$ باشد. آنگاه به‌شرط آنکه $\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t}$ وجود داشته باشد خواهیم داشت:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}=\int_{s}^{\infty}f(u)\,du \qquad (۱\text{ـ}۳۵)$$

تمرین: با استفاده از معادلهٔ (۱ـ۳۴) و فرض $\frac{F(t)}{t}=G(t)$ معادلهٔ (۱ـ۳۵) را اثبات نمائید.

مثال ۱ـ۲۹: می‌دانیم‌که $\mathscr{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^{2}+1}$ می‌باشد. $\mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$ را بدست‌آورید.

حل: باتوجه به اینکه $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ می‌باشد با استفاده از معادلهٔ (۱ـ۳۵):

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_{s}^{\infty}\frac{du}{u^{2}+1}=\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

۱ـ۳ـ۹ـ قضیهٔ مقدار نهایی یک تابع (Final Value Theorem)

مقدار نهایی یک تابع یعنی $\lim_{t\to\infty}\{F(t)\}$ را می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس

به‌صورت زیر بدست آورد:

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{s \to 0} s\,f(s) \qquad (۱\_۳۶)$$

معادلهٔ فوق در صورتی صادق است که دو حد موجود در آن وجود داشته باشند. نتیجهٔ این قضیه در مباحث کنترل فرآیند کاربردهای بسیاری دارد. هنگامی‌که تابع تبدیل لاپلاس یک تابع در دست است ($f(s)$) و تابع اصلی یعنی $F(t)$ معلوم نیست خصوصاً مواقعی که $F(t)$ فرم پیچیده‌ای داشته باشد استفاده از نتیجهٔ این قضیه بسیار حائز اهمیت است.

۱۰ـ۳ـ۱ـ قضیهٔ مقدار ابتدایی یا مقدار اولیه یک تابع (Initial Value Theorem)

مقدار ابتدایی یا اولیهٔ یک تابع یعنی $\lim_{t \to 0} F(t)$ را می‌توان با استفاده از تابع تبدیل لاپلاس به‌صورت زیر بدست آورد:

$$\lim_{t \to 0} F(t) = \lim_{s \to \infty} s\,f(s) \qquad (۱\_۳۷)$$

معادلهٔ فوق در صورتی صادق است که دو حد موجود در آن وجود داشته باشند.

مثال ۳۰ـ۱: تابع تبدیل لاپلاس تابعی به‌صورت $f(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ است مقدار ابتدایی و نهایی آن را بدست آورید.

حل: اگر تابع مطلوب را $F(t)$ بنامیم باتوجه به معادلات (۳۶ـ۱) و (۳۷ـ۱) خواهیم‌داشت:

$$F(\infty) = \lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

$$F(0) = \lim_{t \to 0} F(t) = \lim_{s \to \infty} s\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{s+1} = 0$$

تمرین: در مثال فوق می‌دانیم $F(t) = ۱ - e^{-t}$ است با قراردادن $t = ۰$ و $t = \infty$ نتایج مثال و صحت جواب‌های حاصله را تحقیق نمائید.

باید دانست که روش‌های مختلفی جهت بدست آوردن لاپلاس توابع در دست می‌باشد که از آن میان می‌توان به روش‌های مستقیم انتگرال‌گیری ـ معادلات دیفرانسیل ـ سری‌ها ـ مشتقات و استفاده از جداول اشاره نمود. که پرداختن به تمامی آنها با ذکر جزئیات از حوصلهٔ این بحث خارج است.

در درس کنترل فرآیند روش‌ها و قضایا و خواصی که تاکنون بحث شد (و خواهد شد) جهت لاپلاس‌گیری از توابع کافی خواهد بود ولی علاقمندان می‌توانند جهت کسب اطلاعات بیشتر به کتاب‌های ریاضی در این‌خصوص مراجعه نمایند.

۴ـ۱ـ تبدیل معکوس لاپلاس (Laplace Inverse)

اگر $f(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $F(t)$ باشد این تبدیل توسط عمل اُپراتور $\mathscr{L}$ انجام می‌پذیرد.

$$\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$$

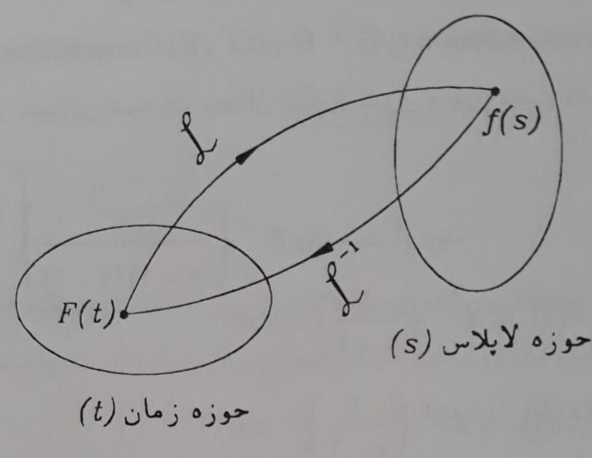
در این‌حالت $F(t)$ را تبدیل معکوس $f(s)$ می‌نامیم که توسط عمل اُپراتور $\mathscr{L}^{-1}$ حاصل می‌شود:

$$F(t) = \mathscr{L}^{-1}\{f(s)\} \qquad (۱ـ۳۸)$$

$\mathscr{L}^{-1}$ اُپراتور تبدیل معکوس لاپلاس نام دارد.

(ارتباط $\mathscr{L}$ و $\mathscr{L}^{-1}$ تقریباً مشابه ارتباط مشتق و انتگرال می‌باشد)

اگر $f(s)$ را تبدیل لاپلاس $F(t)$ بدانیم $F(t)$ تبدیل معکوس لاپلاس $f(s)$ خواهدبود این ارتباط را به‌طور شماتیک می‌توان نشان داد:



بر طبق تعاریف فوق تمامی نتایجی که برای $F(t)$ و $f(s)$ بیان شده‌است برای $\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}^{-1}$ هر دو صادق می‌باشد.

بعنوان مثال داشتیم $\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(t)\,dt\right\} = \frac{f(s)}{s}$. می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(t)\,dt$$

و یا در قضایای قبلی دیدیم $\mathcal{L}\left\{e^{at}F(t)\right\} = f(s-a)$ در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

قضیه Convolution

اگر تابع تبدیل لاپلاس دو تابع $F(t)$ و $G(t)$ به‌ترتیب $f(s)$ و $g(s)$ باشد آنگاه خواهیم‌داشت:

$$\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\ g(s)\} = \underbrace{\int_{\circ}^{t} F(\tau)\, G(t-\tau)\, d\tau}_{F * G} = \underbrace{\int_{\circ}^{t} F(t-\tau)\, G(\tau)\, d\tau}_{G * F} \qquad (۱\_۳۹)$$

$G * F$ را Convolution (F و G) و $F * G$ را Convolution (G و F) می‌نامند.

τ یک متغیر مجازی است که بعد از انتگرال‌گیری و قراردادن حدود انتگرال حذف خواهد شد.

مثال ۳۱_۱: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{۱}{(s-۱)(s-۲)}\right\}$ رابدست آورید:

حل:

$$\frac{۱}{s-۱} = f(s) \Rightarrow F(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{s-۱}\right\} = e^{t}$$

$$\frac{۱}{s-۲} = g(s) \Rightarrow G(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{s-۲}\right\} = e^{۲t}$$

با استفاده از معادلهٔ (۳۹_۱) می‌توان نوشت:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{(s-۱)(s-۲)}\right\} = \int_{\circ}^{t} e^{\tau}.e^{۲(t-\tau)}\, d\tau = \int_{\circ}^{t} e^{(t-\tau)}\, e^{۲\tau}\, d\tau = e^{۲t} - e^{t}$$

تمرین: با استفاده از قضیهٔ Convolution مقدار $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{۱}{s^{۲}(s+۱)}\right\}$ را بدست آورید. (راهنمایی: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{۱}{s^{۲}}\right\} = t \quad , \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{۱}{s+۱}\right\} = e^{-t}$)

دقت نمائید که باتوجه به اینکه $\mathscr{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ می‌باشد نتایج مندرج در جدول (۱_۱) (و جدول ضمیمهٔ الف) برای تبدیل معکوس لاپلاس توابع نیز به‌راحتی قابل استفاده خواهد بود. نتایج برخی از قضایا و خواص تبدیل لاپلاس و معکوس آن در جدول (۲_۱) آورده شده‌است.

تمرین: تبدیل معکوس لاپلاس‌های زیر را بدست آورید:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{۴}{s-۲}\right\} \quad , \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{s^{۴}}\right\} \quad , \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{s^{۲}-a^{۲}}\right\} \quad , \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{(s-۲)^{۲}}\right\}$$

مثال ۳۲_۱: باتوجه به اینکه $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{۱}{s^{n+۱}}\right\} = \dfrac{t^{n}}{n!}$ برای $n = \circ, ۱, ۲, ...$ می‌باشد

مطلوبست $: \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^{n+1}}\right\}$

حل: با توجه با معادلهٔ (۲۵ـ۱): $\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)=e^{at}F(t)$

با قراردادن $F(t) = \frac{t^n}{n!}$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^{n+1}}\right\} = \frac{e^{-at}\ t^n}{n!}$$

گاهی اوقات فرم توابع کمی پیچیده می‌باشد و استفادهٔ مستقیم از جداول و قضایا برای آنها به‌آسانی ممکن نیست. در این مواقع نیاز به پاره‌ای عملیات جبری است. در این خصوص به مثال (۳۳ـ۱) توجه نمائید.

مثال ۳۳ـ۱: مطلوبست $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+2s+5)}\right\}$.

حل: برای حل این مثال باتوجه به این‌که فرم مخرج کمی پیچیده است ابتدا ریشه‌های مخرج را می‌یابیم:

$$s^2+2s+5=0 \Rightarrow s=-1\pm\sqrt{1-5} = 1\pm\sqrt{-4} = 1\pm 2\sqrt{-1}$$

در مبحث اعداد مختلط در ریاضیات می‌دانیم که $\sqrt{-1}$ را با i نشان می‌دهند. در درس کنترل ما $\sqrt{-1}$ را با j نمایش می‌دهیم. پس ریشه‌های مخرج کسر فوق عبارتند از:

$$s_1 = -1 + j2 \quad , \quad s_2 = -1 - j2$$

با داشتن ریشه‌ها، مخرج را به صورت حاصلضرب عاملهای آن می‌نویسیم:

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$$

حال این کسر را تجزیه می‌نمائیم:

$$\frac{1}{(s+1+j2)(s+1-j2)} = \frac{A}{(s+1+j2)} + \frac{B}{(s+1-j2)}$$
$$= \frac{j\,0/25}{(s+1+j2)} - \frac{j\,0/25}{(s+1-j2)}$$

(در رابطهٔ فوق A و B ثوابت هستند).

مقادیر فوق را در صورت مسئله قرارداده و معکوس لاپلاس می‌گیریم:

جدول ۲-۱-خواص عمومی تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس

$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$	$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$
$a\,F(t)$	$a\,f(s)$
$a\,F(t) + b\,G(t)$	$a\,f(s) + b\,g(s)$
$a\,F(at)$	$f(\frac{s}{a})$
$e^{at}\,F(t)$	$f(s - a)$
$F(t - a)$	$e^{-as}\,f(s)$
$F'(t)$	$s\,f(s) - F(0)$
$F''(t)$	$s^2\,f(s) - s\,F(0) - F'(0)$
$F^{(n)}(t)$	$s^n\,f(s) - s^{n-1}\,F(0) - s^{n-2}\,F'(0) - \dots - F^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t F(u)\,du$	$\frac{f(s)}{s}$
$\frac{F(t)}{t}$	$\int_s^\infty f(u)\,du$
$\int_0^t \dots \int_0^t F(u)\,du^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} F(u)\,du$	$\frac{f(s)}{s^n}$
$\int_0^t F(t-\tau)\,G(\tau)\,d\tau$	$f(s)\,g(s)$
$F(t^2)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{s^2}{4u}}\, f(u)\,du$
$-t\,F(t)$	$f'(s)$
$t^2\,F(t)$	$f''(s)$
$(-1)^n\,t^n\,F(t)$	$f^{(n)}(s)$
$\lim_{t \to 0} F(t)$	$\lim_{s \to \infty} s\,f(s)$
$\lim_{t \to \infty} F(t)$	$\lim_{s \to 0} s\,f(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{j\ 0/25}{s+1+j\,2} - \frac{j\ 0/25}{s+1-j\,2}\right\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{j\ 0/25}{s+1+j\,2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{j\ 0/25}{s+1-j\,2}\right\}$$

با توجه به اینکه می‌دانیم $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+a}\right\} = Ae^{-at}$، خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{j\ 0/25}{s+1+j\,2}\right\} = (j\ 0/25)\,e^{-(1+j2)t} =$$

$$(j\ 0/25)\ e^{-t}\ (\cos 2t - j\sin 2t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{j\ 0/25}{s+1-j\,2}\right\} = (j\ 0/25)\,e^{-(1-j2)t} =$$

$$(j\ 0/25)\ e^{-t}\ (\cos 2t + j\sin 2t)$$

این روابط با استفاده از رابطهٔ $e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$ نوشته شده‌است. مقادیر فوق را در رابطهٔ قبلی گذاشته و فاکتورگیری می‌کنیم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+5}\right\} = j\ 0/25\ e^{-t}\left[\cos 2t - j\sin 2t - \cos 2t - j\sin 2t\right]$$

$$= 0/25\ e^{-t}\ [2\sin 2t] = e^{-t}\ [0/5\ \sin 2t + 0\ \cos 2t]$$

با دقت در جواب فوق به این نتیجه می‌رسیم که در تبدیل معکوس لاپلاس در کسرها اگر ریشه‌های مخرج $f(s)$ به‌صورت $s = a \pm jb$ باشند در آن‌صورت جواب آن $e^{at}\ [C_1\cos bt + C_2\sin bt]$ می‌باشد.

[در مثال فوق ریشه‌های مخرج $-1 \pm j\,2$ بودند که جواب به‌صورت $e^{-1t}\ [0\cos 2t + 0/5\sin 2t]$ ظاهر شد] این مسئله کلی است و سه مورد زیر در آن قابل ملاحظه است:

الف: اگر ریشهٔ مخرج حقیقی باشد یعنی $b = 0$ است $(s = a \pm j\,0)$ در آن حالت جواب به‌صورت:

$$e^{at}\ [C_1\cos 0 + C_2\sin 0] = C_1\ e^{at}$$

ظاهر می‌شود بعنوان مثال $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+3}\right\} = Ae^{-3t}$.

ب: اگر ریشه‌های مخرج عدد مختلط محض (Pure Complex) باشد، $a = 0$ یعنی $s = 0 \pm jb$ است در آن حالت جواب به‌صورت زیر خواهد شد:

$$e^{0t}[C_1 \cos bt + C_2 \sin bt] = C_1 \cos bt + C_2 \sin bt$$

مثلاً: اگر مخرج $f(s)$ به‌صورت $s^2 + 9$ یعنی ریشه‌های مخرج $s = \pm j3$ باشد در آن‌صورت جواب خواهدبود:

$$[C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t]$$

ج: اگر ریشه‌های مخرج عدد مختلط کامل باشد $[a \pm jb\ ,\ (a\ ,\ b \neq 0)]$. در آن‌صورت جواب خواهدبود:

$$e^{at}[C_1 \cos bt + C_2 \sin bt]$$

مثلاً: برای مخرج $s^2 + 2s + 10$ داریم:

$$s^2 + 4s + 5 = 0 \quad \Rightarrow s = -2 \pm j1$$

که تابع تبدیل معکوس لاپلاس آن خواهد بود:

$$e^{-2t}[C_1 \cos t + C_2 \sin t]$$

تمرین: تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را بدست آورید:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6s - 4}{s^2 - 4s + 20}\right\}$$

۵-۱- روش حل معادلات دیفرانسل معمولی با استفاده از تبدیل لاپلاس

از آنجاییکه در مباحث کنترل فرآیند معمولاً با معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) روبرو می‌شویم در این بخش به بررسی روش‌های حل این معادلات از روش لاپلاس می‌پردازیم.

در حل معادلات دیفرانسل معمولی از طریق استفاده از لاپلاس ابتدا از طرفین معادلهٔ دیفرانسیل لاپلاس گرفته پس از قراردادن شرایط مرزی (شرایط اولیه)، تبدیل لاپلاس

جواب ($x(s)$) بدست می‌آید. در نهایت با تبدیل معکوس لاپلاس جواب اصلی یا $X(t)$ حاصل می‌گردد. $x(s)$ عموماً به‌صورت کسری درآمده و معمولاً درجهٔ صورت کمتر یا مساوی درجهٔ مخرج (درجه از نظر s) می‌باشد در تبدیل معکوس لاپلاس روش عمومی، تبدیل کسر حاصله به کسرهای ساده‌تر (کسرهای با مخرج درجهٔ اول از s) می‌باشد.

مثال ۳۴ـ۱: مطلوبست حل معادلهٔ دیفرانسیل زیر:

$$\frac{dX}{dt} + X = 1 + t \ , \ X(0) = 0$$

حل: ابتدا از طرفین این معادله لاپلاس می‌گیریم:

$$\mathcal{L}\{X'\} + \mathcal{L}\{X\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{t\}$$

$$\{s\,x(s) - X(0)\} + x(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$x(s)$ لاپلاس $X(t)$ می‌باشد با قراردادن شرط اولیه $X(0) = 0$ در معادلهٔ فوق خواهیم‌داشت:

$$s\,x(s) + x(s) = \frac{1+s}{s^2}$$

$$x(s) = \frac{1}{s^2}$$

برای یافتن $X(t)$ باید از $x(s)$ فوق تبدیل معکوس لاپلاس گرفت. در این‌حالت ساده با مراجعه به جداول تبدیل معکوس لاپلاس تابع $\frac{1}{s^2}$ را می‌یابیم.

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \Rightarrow X(t) = t$$

در مثال فوق $x(s)$ به شکلی ساده درآمد و تبدیل معکوس لاپلاس آن در جداول موجود بود ولی همیشه مسائل به این صورت نیست و در بیشتر حالات کسر حاصله دارای شکلی پیچیده است که تجزیهٔ آن براحتی امکان‌پذیر نمی‌باشد و ناچار از تجزیهٔ آن به کسرهای ساده‌تر می‌باشیم.

مثال ۳۵ـ۱: مطلوبست حل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر:

$$X' + X = 1 \ . \ X(0) = 0$$

حل: با لاپلاس‌گیری از دوطرف معادله خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\{X'\} + \mathcal{L}\{X\} = \mathcal{L}\{1\}$$

$$[s\,x(s) - X(0)] + x(s) = \frac{1}{s}$$

با استفاده از شرط مرزی $X(0) = 0$ نتیجه می‌شود:

$$(s+1)\,x(s) = \frac{1}{s}$$

$$x(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

دیده می‌شود که در مقایسه با مثال (۳۴-۱) شکل $x(s)$ کمی پیچیده‌تر شد. برای یافتن $X(t)$ باید $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$ را بدست آورد. ابتدا این کسر را به‌صورت زیر تجزیه نموده و ثوابت A و B مناسب را می‌یابیم.

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

B و A به‌راحتی از مخرج‌مشترک‌گیری و متحدقراردادن صورت‌های دوطرف معادله بدست می‌آید:

$$A = 1 \quad , \quad B = -1$$

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

با دانستن تابع تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{1}{s}$ و $\frac{1}{s+1}$ جواب بدست می‌آید:

$$X(t) = 1 - e^{-t}$$

مثال ۳۶-۱: از حل معادلهٔ دیفرانسیلی از روش لاپلاس به تابع تبدیل لاپلاس جواب یعنی $x(s)$ به‌صورت زیر رسیده‌ایم:

$$x(s) = \frac{4s^3 - 5s^2 + 5s + 2}{s(s^3 - 2s^2 - s + 2)}$$

$X(t)$ را بدست آورید.

حل: باید از $x(s)$ تبدیل معکوس لاپلاس بگیریم:

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{۴s^۳ - ۵s^۲ + ۵s + ۲}{s(s^۳ - ۲s^۲ - s + ۲)}\right\}$$

باید ابتدا کسر فوق را تجزیه نمود. بدین‌منظور یافتن ریشه‌های مخرج ضروری است، (۰ و ۲ و ۱- و ۱). با این ریشه‌ها کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{۴s^۳ - ۵s^۲ + ۵s + ۲}{s(s+۱)(s-۱)(s-۲)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+۱} + \frac{C}{s-۱} + \frac{D}{s-۲}$$

یافتن ثوابت A و B و C و D بدین‌صورت خواهد بود که:

برای یافتن هر ثابتی ابتدا طرفین معادله را در مخرج آن ثابت ضرب کرده و سپس s را برابر ریشهٔ همان مخرج قرار می‌دهیم:

یافتن A: ضرب طرفین در s و قراردادن $s = ۰$.

$$\frac{۴s^۳ - ۵s^۲ + ۵s + ۲}{(s+۱)(s-۱)(s-۲)} = A + \frac{Bs}{s+۱} + \frac{Cs}{s-۱} + \frac{Ds}{s-۲} \Rightarrow A = ۱$$

یافتن B: ضرب طرفین در $(s + ۱)$ و قراردادن $s = -۱$.

$$\frac{۴s^۳ - ۵s^۲ + ۵s + ۲}{s(s-۱)(s-۲)} = \frac{A(s+۱)}{s} + B + \frac{C(s+۱)}{s-۱} + \frac{D(s+۱)}{s-۲} \Rightarrow B = ۲$$

یافتن C: ضرب طرفین در $(s - ۱)$ و قراردادن $s = ۱$.

$$\frac{۴s^۳ - ۵s^۲ + ۵s + ۲}{s(s+۱)(s-۲)} = \frac{A(s-۱)}{s} + \frac{B(s-۱)}{s+۱} + C + \frac{D(s-۱)}{s-۲} \Rightarrow C = -۳$$

یافتن D: ضرب طرفین در $(s - ۲)$ و قراردادن $s = ۲$.

$$\frac{۴s^۳ - ۵s^۲ + ۵s + ۲}{s(s+۱)(s-۱)} = \frac{A(s-۲)}{s} + \frac{B(s-۲)}{s+۱} + \frac{C(s-۲)}{s-۱} + D \Rightarrow D = ۴$$

بجای ثوابت A و B و C و D مقادیرشان را جایگزین می‌نمائیم:

$$x(s) = \frac{۴s^۳ - ۵s^۲ + ۵s + ۲}{s(s^۳ - ۲s^۲ - s + ۲)} = \frac{۱}{s} + \frac{۲}{s+۱} - \frac{۳}{s-۱} + \frac{۴}{s-۲}$$

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{s}\right\} + ۲\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{s+۱}\right\} - ۳\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{s-۱}\right\} + ۴\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{۱}{s-۲}\right\}$$

$$X(t) = ۱ + ۲\,e^{-t} - ۳\,e^{t} + ۴\,e^{۲t}$$

باید دقت نمود در صورتی‌که در مخرج عواملی با توان بیش از یک ظاهر شد، در تجزیهٔ آن کسر باید کلیهٔ توان‌های آن عامل را تا یک در نظر گرفت. به مثال زیر توجه فرمائید:

مثال ۳۷ـ۱: مطلوبست حل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر:

$$X'' - ۲X' + X = e^{t} - ۱$$

$$X(۰) = X'(۰) = ۰$$

حل: از طرفین معادلهٔ دیفرانسیل لاپلاس می‌گیریم:

$$[s^۲ x(s) - s\,X(۰) - X'(۰)] - ۲\,[s\,x(s) - X(۰)] + x(s) = \frac{۱}{s-۱} - \frac{۱}{s}$$

$$x(s)\,(s^۲ - ۲s + ۱) = \frac{۱}{s\,(s-۱)} \Rightarrow x(s) = \frac{۱}{s(s-۱)^۳}$$

$x(s)$ حاصله را باید به‌کسرهای ساده تجزیه نمائیم:

$$\frac{۱}{s(s-۱)^۳} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-۱)^۳} + \frac{C}{(s-۱)^۲} + \frac{D}{s-۱}$$

یافتن A: ضرب طرفین در s و قراردادن $s = ۰$.

$$\frac{۱}{(s-۱)^۳} = A + \frac{Bs}{(s-۱)^۳} + \frac{Cs}{(s-۱)^۲} + \frac{Ds}{(s-۱)} \Rightarrow A = -۱$$

یافتن B: ضرب طرفین در $(s-۱)^۳$ و قراردادن $s = ۱$.

$$\frac{۱}{s} = \frac{A\,(s-۱)^۳}{s} + B + C\,(s-۱) + D\,(s-۱)^۲ \Rightarrow B = ۱$$

یافتن C: اگر طرفین را در $(s-۱)^۲$ ضرب نمائیم و $s = ۱$ قرار دهیم مخرج B و مخرج سمت چپ صفر خواهد شد لذا در این موارد از معادلهٔ بالا (معادلهٔ یافتن B) یک‌بار مشتق گرفته و در آن $s = ۱$ قرار می‌دهیم:

$$-\frac{۱}{s^۲} = \frac{۳\,s(s-۱)^۲ - (s-۱)^۳}{s^۲}\,A + C + ۲\,D\,(s-۱) \Rightarrow C = -۱$$

یافتن D: از معادلهٔ فوق که برای یافتن C حاصل شد یک‌بار مشتق گرفته و در آن

$s = 1$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{2}{s^3} = \frac{2(s-1)(s^2+s+1)}{s^3} A + 2D \Rightarrow D = 1$$

با یافتن ثوابت تجزیه کسر کامل شد:

$$x(s) = \frac{1}{s(s-1)^3} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)}$$

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} =$$

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} + \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}$$

$$= -1 + \frac{t^2 e^t}{2} - t e^t + e^t = -1 + e^t\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)$$

معکوس‌گیری فوق باتوجه به مثال (۳۲ـ۱) انجام شده است.

باید دانست که استفاده از روش تجزیه به کسرهای ساده به‌شرطی که ریشه‌های مخرج قابل بدست‌آوردن باشد مُیسّر است.

در برخی موارد اگر شکل $x(s)$ به‌گونه‌ای باشد که بتوانیم به توابع مشخصی از لاپلاس برخورد نمائیم می‌توانیم باتوجه به تجربه و مهارت، تجزیهٔ کامل کسر را انجام ندهیم و به‌دنبال یافتن این شکل‌های مشخص باشیم تا در نهایت تبدیل معکوس لاپلاس آنها را اِعمال کنیم.

مثال ۳۸ـ۱: مطلوب است حل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر:

$$X'' + X = t \quad , \quad X(0) = 1 \quad , \quad X'(0) = -2$$

حل: از طرفین معادلهٔ دیفرانسیل لاپلاس می‌گیریم:

$$[s^2 x(s) - s X(0) - X'(0)] + x(s) = \frac{1}{s^2}$$

بعد از قراردادن شرایط اولیه خواهیم داشت:

$$s^2 x(s) - s + 2 + x(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$x(s)(s^2+1) = \frac{1}{s^2} + s - 2$$

طرفین معادله را بر $s^2 + 1$ تقسیم می‌نمائیم:

$$x(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$

$$x(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}$$

دیده می‌شود که تبدیل معکوس لاپلاس هر ۳ کسر سمت راست در معادلهٔ فوق را در جدول (۱-۱) داریم. پس تجزیهٔ بیشتر لازم نیست و می‌توانیم به‌جواب مسئله دست یابیم:

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\right\}$$

$$X(t) = t + \cos t - 3\sin t$$

خلاصه

در این فصل ضمن آشناشدن با تبدیل لاپلاس و تبدیل معکوس لاپلاس توابع، قضایا و خواص کاربردی لاپلاس را بیان کردیم. ضمناً توابع خاص مورد استفاده در درس کنترل را با ذکر مثال‌های فیزیکی معرفی و بررسی نمودیم.

در نهایت روش‌های حل معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت را از طریق تجزیه به کسرهای ساده دیدیم. مطالب این فصل در اصل پایه و اساس اصول ریاضی مورد استفاده در فصل‌های بعدی خواهد بود.

مسائل

۱-۱- تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

a) $2t^2 - e^{-t}$

b) $۱۰ \sin ۶t$

c) $(t^{۲} + ۱)^{۲}$

d) $۲ \cosh ۵t - ۴ \sinh ۵t$

e) $۲ t^{۲} + ۴ e^{-۳t} + ۳ \cos ۲t$

f) $e^{-۴t} \cosh ۲t$ $\quad L\{\cosh 2t\} = \frac{s}{s^2-4} \qquad \frac{s+4}{(s^2+4)-4}$

g) $e^{۲t} (۳ \sin ۴t - ۴ \cos ۴t)$

h) $t^{۳} e^{-۳t}$

۲ـ۱ـ تابع تبدیل لاپلاس $F(t)$ را پیدا کنید.

$$F(t) = \begin{cases} (t-۱)^{۲} & t>۱ \\ ۰ & t<۱ \end{cases}$$

۳ـ۱ـ معادلهٔ زیر را حل نموده و $X(t)$ را بدست آورید:

$$\int_{۰}^{t} X(\tau)\, d\tau = X' \qquad X(۰) = ۱$$

۴ـ۱ـ تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید:

a) $\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۲s-۵}{s^{۲}-۹}\right\}$

b) $\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{s^{۵}}\right\}$

c) $\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۱}{۲s-۵}\right\}$

d) $\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۳s-۱۴}{s^{۲}-۴s+۸}\right\}$

e) $\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۳s+۲}{۴s^{۲}+۱۲s+۹}\right\}$

f) $\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{۵s-۲}{۳s^{۲}+۴s+۸}\right\}$

g) $\mathcal{L}^{-۱}\left\{\frac{s}{(s+۱)^{۵}}\right\}$

۵-۱- با استفاده از قضیهٔ Convolution معکوس لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+3)(s-1)}\right\}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\}$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$

۶-۱- با استفاده از تجزیه به کسرهای ساده، تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+16}{s^2-s-6}\right\}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^3-s}\right\}$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{6s^2+7s+2}\right\}$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\right\}$

e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\}$

f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$

g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\right\}$

h) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+3}{s^3+2s^2+2}\right\}$

i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s^3+4s^2+9s+10}\right\}$

j) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5\,e^{-0/25\,s}}{s(2s+1)}\right\}$

k) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s+1)^3}\right\}$

l) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+1}\right\}$

۷-۱- معادلات دیفرانسیل معمولی زیر را از روش لاپلاس حل نمائید:

$X''' + 4X = e^{-t} \qquad X(0) = X'(0) = X''(0) = 0$

$X'' + 4X = 12\,t \;,\; X(0) = 0 \;,\; X'(0) = 7$

$X' - 12X = \sin 3t \qquad X(0) = 0$

$X'' - 3X' + 2X = 4\,t + 12\,e^{-t} \qquad X(0) = 6 \;,\; X'(0) = -1$

$X'' - 4X' + 5X = 125\,t^2 \;,\; X(0) = X'(0) = 0$

$X'' + 6X' + 25X = e^{-t} \;,\; X(0) = X'(0) = 0$

$X'''' + 2X'' + X = \sin t \;,\; X(0) = X'(0) = X''(0) = X'''(0) = 0$

$X'' + 3X' + 2X = 2 \;,\; X(0) = X'(0) = 0$

۸-۱- معادلهٔ دیفرانسیل زیر را به‌ازای دو حالت a و b حل نمائید.

$X'' + 4X = F(t) \qquad X(0) = 0 \;,\; X'(0) = 1$

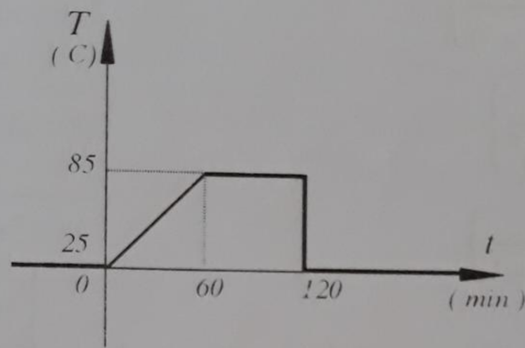
a) $F(t) = \delta(t)$

b) $F(t) = u(t-2)$

۹-۱- معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل نموده و با استفاده از قضیهٔ مقدار نهایی $\lim_{t\to\infty} X(t)$ را بدست آورید:

$X'' + X' + X = t \qquad X(0) = X'(0) = 0$

۱-۱۰- دمای گرمکن یک رآکتور ناپیوسته پلمیریزاسیون را مطابق شکل زیر تغییر می‌دهیم. $T(s)$ را پیدا کنید.



۱-۱۱- با استفاده از قضایای مقدار نهایی و مقدار ابتدایی مقادیر $X(t)$ را در $t = 0$ و $t \to \infty$ بدست آورید.

$$x(s) = \frac{2(s+2)}{(s^2+9s+20)(s+5)}$$

$$x(s) = \frac{5s^2-10}{(s^2-6s+20)(s+4)}$$

$$x(s) = \frac{5s+6}{s^2+7}$$

۱-۱۲- اگر تابع تبدیل لاپلاس $F(t)$ بصورت $f(s) = \dfrac{e^{-t_1 s} - e^{-t_2 s}}{s}$ باشد، شکل $F(t)$ را رسم نمائید ($t_2 > t_1$).

۱-۱۳- در صورتیکه داشته‌باشیم $f(s) = \dfrac{2s+5}{s^2+3s+2}$.

بدون یافتن $F(t)$ مقادیر $F'(t)$ و $\int_0^t F(t)\,dt$ را بدست آورید.

۱-۱۴- در صورتیکه $f(s) = \dfrac{5e^{-0/2s}}{s^2+5s+32}$ باشد تابع $F(t)$ را بدست‌آورید.

۱-۱۵- با استفاده از قضیه Convolution تابع $F(t)$ را پیداکنید.

$$f(s) = \frac{10s}{(s^2+100)(s+2)}$$